Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation de la fermeture d'un tiroir** (12 questions) — **Page 3**
2. **Séries de Fourier d'une fonction paire périodique** (10 questions) — **Page 7**
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmv.fr/assets/annales/bts-mv/E2 - Mathématiques/2023/BTS MV - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation de la fermeture d'un tiroir

La distance entre le fond du tiroir et le fond du meuble est modélisée par une fonction f du temps, exprimée en centimètres. L'exercice étudie cette fermeture par une équation différentielle, l'analyse de la fonction obtenue, un algorithme et le calcul d'une position moyenne.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On calcule le discriminant : $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux racines réelles distinctes. Elles valent $r_1 = (-5 + 3)/2$ et $r_2 = (-5 - 3)/2$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1.b. À l'aide du tableau fourni, résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

Les racines de l'équation caractéristique sont -1 et -4, réelles et distinctes. Le tableau fourni indique que la solution générale est une combinaison des exponentielles associées à ces racines. Les constantes sont réelles et arbitraires.

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Partie A - Conditions initiales

Question 2.a. À partir de la distance initiale de 20 cm et de la vitesse initiale négative de 10 cm·s⁻¹, déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).

La fonction f représente la distance OM en centimètres. À l'instant initial, cette distance est de 20 cm, donc $f(0) = 20$. La vitesse de rapprochement est donnée comme négative et vaut -10 cm·s⁻¹. Puisque la vitesse est la dérivée de la distance par rapport au temps, elle donne directement la valeur de $f'(0)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s⁻¹.

Question 2.b. **Sachant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

1. On remplace t par 2 dans l'expression donnée : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-4\times 2}$.
2. On conserve cette forme exponentielle pour donner la valeur exacte, sans arrondir.

Cette distance est exprimée en centimètres.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2.c. **Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, en justifiant.**

La distance diminue au cours du temps. Il suffit donc de vérifier qu'elle passe sous 0,5 cm à un instant inférieur à 4 secondes. Prenons $t = 3,9$ s :

- $f(3,9) \approx 0,472$ cm ;
- $0,472 < 0,5$, donc le tiroir est fermé à cet instant.

Comme 3,9 s est inférieur à 4 s, l'affirmation du constructeur est vraie.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : à 3,9 s, OM ≈ 0,472 cm, donc le tiroir est fermé avant 4 s.

Partie B - Étude de fonction

Question 1.a. **En utilisant la limite rappelée de e⁻ᵘ lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Quand t tend vers $+\infty$, les deux exposants $-t$ et $-4t$ tendent vers $-\infty$. Ainsi, les deux exponentielles tendent vers 0. Chaque terme de l'expression tend donc vers 0, et leur différence tend également vers 0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0.$

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est le réel 0. Une fonction qui tend vers un réel L possède une asymptote horizontale d'équation $y = L$ en $+\infty$. Ici, la courbe se rapproche donc de l'axe des abscisses lorsque le temps augmente.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme avec la règle $(e^{u(t)})' = u'(t)e^{u(t)}$. Pour le premier terme, $(e^{-t})' = -e^{-t}$. Pour le second, $(e^{-4t})' = -4e^{-4t}$, et le coefficient $-\frac{10}{3}$ donne donc un terme dérivé positif. On obtient ainsi l'expression de la dérivée sur tout l'intervalle indiqué.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Comme $f'(t) < 0$ sur $[0; +\infty[$, la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle. Son point de départ est $f(0) = 20$ et sa limite en $+\infty$ est 0. La valeur 0 est une limite, non une valeur atteinte dans ce tableau de variations.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	↘ 0

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en indiquant les valeurs de f(t) arrondies au centième et le résultat de la condition, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

À chaque itération, t augmente de 0,1. Les valeurs de $f(t)$ sont arrondies au centième dans le tableau, tandis que la condition porte sur la valeur de la fonction et son seuil 0,5. La condition reste vraie à 3,8, puis devient fausse à 3,9 : la boucle s'arrête alors.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition** $f(t) > 0,5$
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arrêt à la ligne 39 : $t = 3,9$.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

1. À $t = 3,8$, la condition est vraie : $f(3,8) > 0,5$. L'algorithme ajoute donc 0,1.
2. Il teste ensuite $t = 3,9$, où $f(3,9) < 0,5$. La condition devient fausse et la boucle s'arrête.

Dans le contexte, le tiroir est fermé à cet instant, qui est inférieur à 4 secondes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3,9$ s ; le tiroir est fermé en moins de 4 s.

Question 4. La position moyenne est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Une primitive de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$ est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. Ainsi, $m = \frac{1}{4}\big(F(4) - F(0)\big)$.

En évaluant aux bornes, on obtient $m = \frac{1}{4}\left(-\frac{70}{3}e^{-4} + \frac{5}{6}e^{-16} + \frac{70}{3} - \frac{5}{6}\right)$. Le regroupement des termes constants et exponentiels donne la forme demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}$.

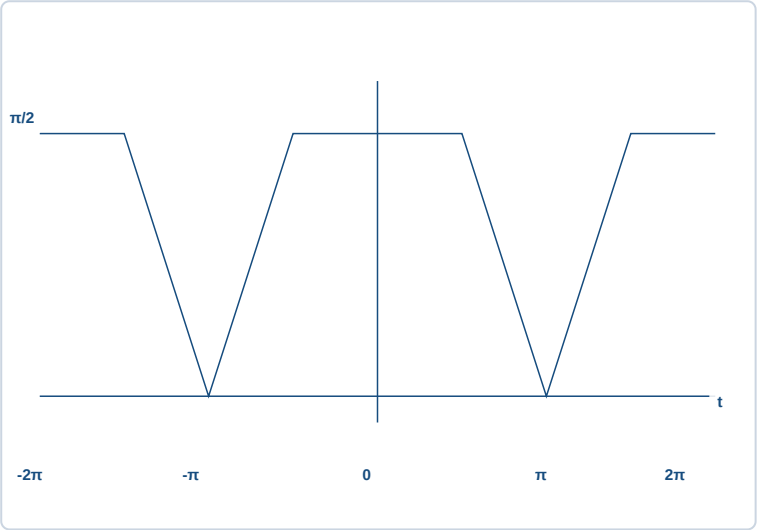
2. Séries de Fourier d'une fonction paire périodique

L'exercice étudie une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π]. À partir de son graphe et du formulaire de Fourier, il demande de calculer des coefficients, de reconnaître une somme partielle et d'évaluer l'erreur d'une approximation de la valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-2π ; 2π].

Sur $[-2\pi ; 2\pi]$, la fonction est paire et de période 2π. Elle vaut $\pi/2$ sur $[-\pi/2 ; \pi/2]$, puis décroît linéairement jusqu'à 0 en π. Par parité et périodicité, le même motif se répète : les minima sont en $-\pi$ et π, et les plateaux sont à la hauteur $\pi/2$.

Graphe de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Graphe pair et périodique : plateaux à $\pi/2$, minima nuls en $-\pi$ et π.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

La fonction f est paire et $\sin(nt)$ est impaire. Leur produit est donc impair. Son intégrale sur l'intervalle symétrique $[-\pi ; \pi]$ est nulle. Or le coefficient de Fourier s'écrit $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$. Cette intégrale étant nulle, on obtient le résultat pour tout entier $n \geq 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

La période indiquée dans l'énoncé est $T = 2\pi$. Le formulaire donne la pulsation par $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Ainsi, $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$, en radians par unité de temps.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$.

Question 4. Démontrer que le coefficient constant de Fourier a₀ vaut 3π/8.

Le formulaire donne $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. Avec la période 2π et la parité de f, cela devient $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. Sur $[0;\pi/2]$, l'aire vaut $\pi^2/4$, puis le triangle sur $[\pi/2;\pi]$ a pour aire $\pi^2/8$. Donc $a_0 = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8}) = \frac{3\pi}{8}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, aₙ = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π - t)cos(nt)dt.

Comme f est paire, le formulaire donne $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$. Ici, $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, donc $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. En séparant aux deux expressions de f, puis en simplifiant le facteur $\frac{2}{\pi}$ sur le premier intervalle, on obtient :

$a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

Question 6. En admettant que aₙ = 2/(πn²)[cos(nπ/2) - cos(nπ)], déterminer les valeurs exactes de a₁, a₂ et a₃.

On applique $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos(\frac{n\pi}{2}) - \cos(n\pi)\right)$. Pour $n = 1$, les cosinus valent 0 et -1, donc $a_1 = 2/\pi$. Pour $n = 2$, ils valent -1 et 1, donc $a_2 = -1/\pi$. Pour $n = 3$, ils valent 0 et -1, donc $a_3 = 2/(9\pi)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. Déduire l'expression de s₃(t) : s₃(t) = 3π/8 + (2/π)cos(t) - (1/π)cos(2t) + (2/(9π))cos(3t).

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3} a_n\cos(nt)$, puisque les coefficients b_n sont nuls. En remplaçant a_0, a_1, a_2, a_3 par leurs valeurs obtenues aux questions précédentes :

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

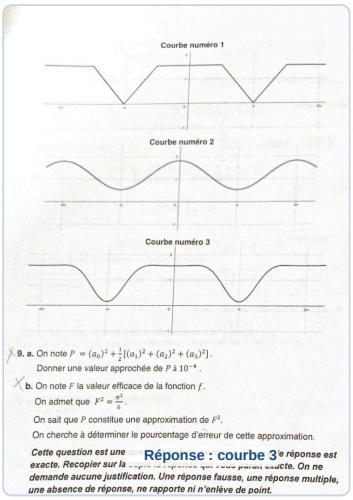
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées représente la fonction s_3.

La courbe de s_3 est périodique, avec des creux près des multiples impairs de π et des parties hautes arrondies autour des multiples de 2π. Sur le document, ces caractéristiques correspondent à la courbe numéro 3.

Courbe correspondant à s_3



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Courbe numéro 3.

Question 9.a. Pour P = (a₀)² + 1/2[(a₁)² + (a₂)² + (a₃)²], donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.

Avec les coefficients exacts, $P = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{9\pi}\right)^2\right]$. En regroupant les termes, on obtient $P = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}$. Son arrondi à 10^{-4} près est $1{,}6437$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P \approx 1{,}6437$.

Question 9.b. Sachant que F² = π²/6 et que P constitue une approximation de F², choisir le pourcentage d'erreur parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est attendue, sans justification.

Le pourcentage d'erreur vaut $100\frac{|P - F^2|}{F^2}$. Avec $P \approx 1{,}6437$ et $F^2 = \pi^2/6 \approx 1{,}6449$, on obtient une erreur d'environ $0{,}074\,\%$. Parmi les trois choix proposés, la valeur correspondante est $0{,}1\,\%$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

0,1 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2023, code 23MATGRB2, dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle porte sur la fermeture d'un tiroir, puis sur les séries de Fourier d'une fonction paire périodique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, l'équation caractéristique associée est $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- Si $f(t)$ tend vers une limite finie L à l'infini, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation $y = L$.
- La pulsation d'une fonction de période T est $\omega = 2\pi/T$; si f est paire, ses coefficients sinus b_n sont nuls.
- Pour une fonction paire de période T, $a_n = (4/T)\int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$ pour $n \geq 1$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la distance initiale $f(0)$ de la vitesse initiale $f'(0)$, en conservant le signe négatif du mouvement vers O.
- Dans l'algorithme, évaluer la condition après chaque incrément de t et arrondir les valeurs demandées au centième.
- Respecter la définition par morceaux, la parité et la période pour tracer la fonction sur l'intervalle demandé.
- Pour le pourcentage d'erreur, comparer P à F^2, et non à F, puis choisir une seule réponse au QCM.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment obtenir la solution générale de l'équation différentielle du tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines réelles étant distinctes, la solution générale est une combinaison des exponentielles associées. Les conditions initiales permettent ensuite de déterminer les constantes.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice sur Fourier ?

La fonction f est paire et $\sin(n\omega t)$ est impaire. Leur produit est donc impair, et son intégrale sur une période symétrique est nulle. Cela entraîne l'annulation de tous les coefficients sinus b_n.

Q : Comment interpréter l'arrêt de l'algorithme du tiroir ?

La boucle s'arrête au premier incrément pour lequel la distance calculée ne dépasse plus le seuil $s = 0{,}5$ cm. La valeur finale de t donne ainsi le temps estimé auquel le tiroir atteint le critère de fermeture.

Q : Que faut-il respecter pour les réponses graphiques et le QCM ?

Le tracé doit respecter la définition par morceaux, la parité et la période indiquées. Pour le QCM sur l'erreur, une seule proposition est attendue. Le sujet précise qu'aucune justification n'est demandée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmv.fr/assets/annales/bts-mv/E2 - Mathématiques/2023/BTS MV - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Maintenance des Véhicules : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.