Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux (2 options) : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle, étude de fonction et développement limité (14 questions) **Page 3**

2. Prêts et réparations de vélos : probabilités et estimation d’une proportion (10 questions) **Page 8**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmv.fr/assets/annales/bts-mv/E2 - Mathématiques/2023/BTS MV - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle, étude de fonction et développement limité

La distance entre le point M, au fond du tiroir, et le point O, au fond du meuble, est modélisée par une fonction f du temps. L’exercice étudie cette fonction par une équation différentielle, ses variations, un algorithme et un développement limité afin de décrire le mouvement du tiroir.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On factorise le trinôme : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. Un produit est nul si l’un de ses facteurs est nul. On résout donc séparément $r + 1 = 0$ et $r + 4 = 0$. Les deux racines sont réelles et distinctes.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. Résoudre l’équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0 en utilisant le tableau fourni.

L’équation caractéristique est $r^2 + 5r + 4 = 0$, dont les deux racines sont -1 et -4. Le tableau fourni indique que, lorsque l’équation caractéristique a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, la solution générale est $C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$. On remplace les racines par leurs valeurs.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la position initiale de M, situé à 20 cm de O, et de sa vitesse initiale de -10 cm·s⁻¹, déterminer f(0) et f'(0).

La fonction f représente la distance OM, exprimée en centimètres. À l’instant initial, $OM = 20$, donc $f(0) = 20$. La dérivée de la distance par rapport au temps correspond à la vitesse selon l’axe considéré. Puisque le point se rapproche de O à la vitesse initiale négative de $-10\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$, on obtient $f'(0) = -10$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$.

Question 2.b. Sachant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

On remplace t par 2 dans l’expression de f. La distance exacte s’obtient en conservant les deux termes exponentiels : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. Cette expression est positive et vaut environ $3{,}157$ cm.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question *. Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de quatre secondes et justifier.

On calcule la distance au bout de 4 secondes : $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427$ cm, donc elle est sous le seuil de 0,5 cm. De plus, pour $t \geq 0$, $f'(t) = \frac{10}{3}e^{-4t}(4 - 7e^{3t}) < 0$, car $e^{3t} \geq 1$. La distance décroît donc et le seuil est franchi avant 4 secondes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui : le tiroir est fermé avant 4 secondes.

Partie B

Question 1.a. En utilisant la limite rappelée de e^{-u} lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Quand t tend vers $+\infty$, les exposants $-t$ et $-4t$ tendent vers $-\infty$. Ainsi, e^{-t} et e^{-4t} tendent tous deux vers 0. La limite de leur combinaison linéaire est donc également nulle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente une équation de l'asymptote à la courbe représentative de f.

La courbe de f se rapproche d'une droite horizontale lorsque t tend vers $+\infty$ si $f(t)$ admet une limite finie. D'après la question précédente, cette limite vaut 0. La droite asymptote est donc l'axe des abscisses, dont l'équation est $y = 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive séparément les deux termes de f, en utilisant $(e^{at})' = ae^{at}$. Ainsi, $\left(\frac{70}{3}e^{-t}\right)' = -\frac{70}{3}e^{-t}$, tandis que $\left(-\frac{10}{3}e^{-4t}\right)' = \frac{40}{3}e^{-4t}$. On additionne ces dérivées pour obtenir $f'(t)$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

La dérivée est négative sur l'intervalle donné, donc f est strictement décroissante. À la borne gauche, $f(0) = 20$, et à l'infini, $f(t)$ tend vers 0. Le tableau indique ainsi une décroissance de 20 vers 0 sur tout l'intervalle.

t	**0**	$+\infty$
$f(t)$	20	$\searrow$ 0

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

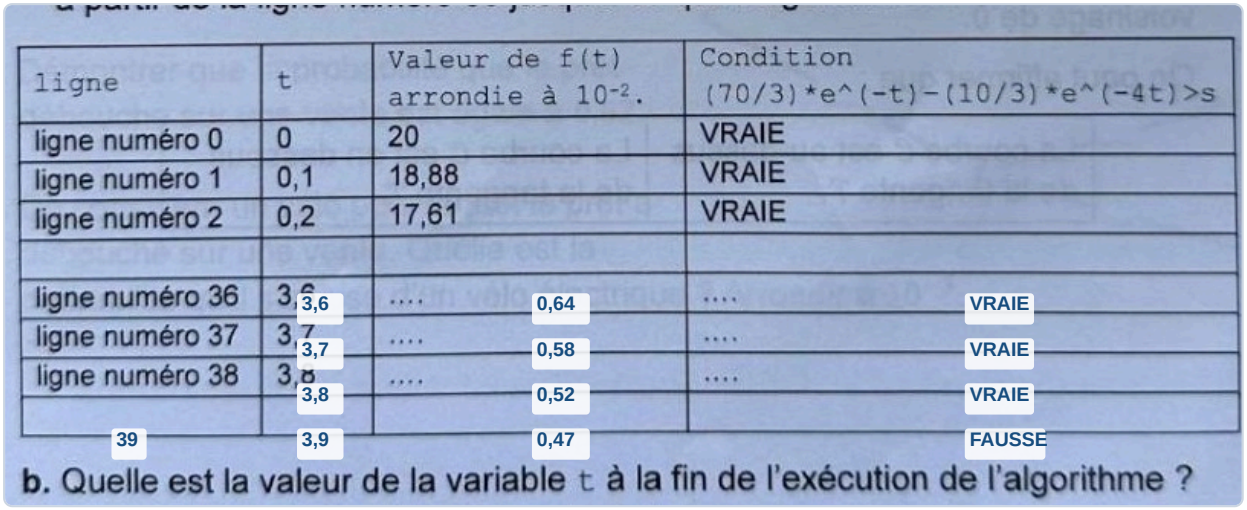
f décroît de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en ajoutant des lignes si nécessaire, avec les valeurs de f(t) arrondies au centième et le résultat du test de la condition, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

La valeur testée dans la condition est exactement $f(t)$, et le seuil vaut 0,5. À chaque ligne, t augmente de 0,1. Les valeurs arrondies au centième restent supérieures au seuil jusqu'à $t = 3{,}8$. À $t = 3{,}9$, elles deviennent inférieures au seuil : la condition est fausse et l'algorithme s'arrête.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

Tableau de l’algorithme complété



ligne	t	Valeur de f(t) arrondie à 10^{-2}.	Condition (70/3)*e^(-t)-(10/3)*e^(-4t)>s
ligne numéro 0	0	20	VRAIE
ligne numéro 1	0,1	18,88	VRAIE
ligne numéro 2	0,2	17,61	VRAIE
ligne numéro 36	3,6	....	....
ligne numéro 37	3,7	....	....
ligne numéro 38	3,8	....	....
39	3,9	0,64 / 0,58 / 0,52 / 0,47	VRAIE / VRAIE / VRAIE / FAUSSE

b. Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l’exécution de l’algorithme ?

✓ RÉPONSE À RETENIR

La condition devient fausse à la ligne 39, pour $t = 3{,}9$.

Question 3.b. Donner la valeur de t à la fin de l’exécution de l’algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l’exercice.

À $t = 3{,}8$, la condition est encore vraie car $f(3{,}8) \approx 0{,}52 > 0{,}5$. La boucle ajoute alors 0,1 à t. À $t = 3{,}9$, on a $f(3{,}9) \approx 0{,}47 < 0{,}5$, donc la condition est fausse et l’algorithme s’arrête. Le seuil de fermeture est alors atteint.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3{,}9$ s : le tiroir est considéré comme fermé.

Question 4.a. À partir de la partie régulière du développement limité de f à l’ordre deux au voisinage de zéro, déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d’abscisse 0.

Le logiciel donne la partie régulière du développement limité : $20 - 10t - 15t^2$. La tangente au point d’abscisse 0 ne dépend que des termes de degré 0 et 1. Son ordonnée à l’origine est donc 20, et son coefficient directeur est -10. On obtient l’équation de la tangente dans le repère $(t, f(t))$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 10t$.

Question 4.b. Parmi les propositions, recopier l'unique réponse exacte donnant le développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.

La partie régulière donnée à l'ordre deux est $20 - 10t - 15t^2$. La forme d'un développement limité à cet ordre ajoute à cette partie un reste $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0. Il faut donc retenir la proposition qui comporte précisément ce reste.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 4.c. À partir du développement limité, indiquer si la courbe C est au-dessus ou en dessous de sa tangente T au voisinage de zéro. Choisir l'affirmation exacte.

La tangente a pour équation $T(t) = 20 - 10t$. Le développement limité donne $f(t) - T(t) = t^2(-15 + \varepsilon(t))$, avec $\varepsilon(t) \to 0$. Au voisinage de 0, le facteur $-15 + \varepsilon(t)$ reste négatif. Pour $t \neq 0$, $t^2 > 0$, donc $f(t) - T(t) < 0$: la courbe est en dessous de sa tangente.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe C est en dessous de la tangente T au voisinage de 0.

2. Prêts et réparations de vélos : probabilités et estimation d'une proportion

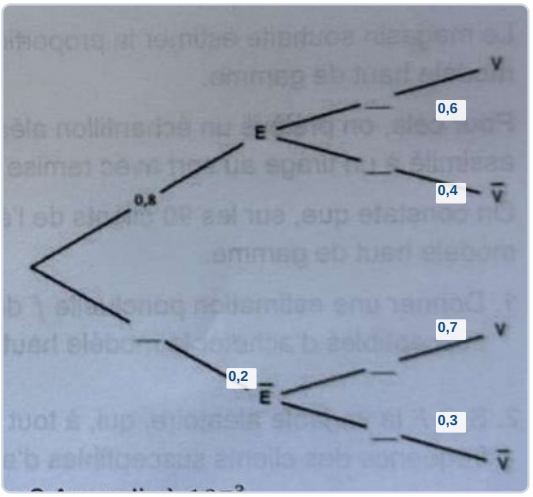
Un magasin prête des vélos électriques ou mécaniques dans l'espoir que le prêt débouche sur une vente, puis observe la durée de réparation de vélos. L'exercice mobilise les probabilités conditionnelles, la loi binomiale et un intervalle de confiance pour estimer la proportion de clients susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré représentant le type de vélo prêté et l'issue du prêt, vente ou absence de vente, à partir des données fournies.

Le premier embranchement sépare les deux types de vélos : la branche électrique porte déjà la probabilité 0,8 sur le document. La branche mécanique porte sa probabilité complémentaire. Depuis chaque type, les branches de vente et d'absence de vente indiquent les probabilités conditionnelles correspondantes. Les deux issues conditionnelles de chaque type doivent totaliser 1. Les valeurs manquantes sont inscrites directement sur l'arbre ci-contre.

Arbre pondéré complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

Électrique : 0,8 ; mécanique : 0,2. Après électrique : vente 0,6, absence de vente 0,4. Après mécanique : vente 0,7, absence de vente 0,3.

Question 2. Déterminer la probabilité que le vélo prêté soit électrique et que le prêt débouche sur une vente, soit P(E ∩ V).

Le chemin correspondant à l'événement « vélo électrique et vente » combine la probabilité d'obtenir un vélo électrique et celle d'une vente sachant que le vélo est électrique. On multiplie donc la probabilité du premier embranchement par celle du second : $P(E \cap V) = P(E) \times P(V \mid E) = 0,8 \times 0,6$. Ce calcul porte sur un seul chemin de l'arbre, sans additionner les autres issues possibles.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(E \cap V) = 0,48.$

Question 3. Démontrer que la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est égale à 0,62.

1. Les deux chemins menant à une vente sont : vélo électrique puis vente, ou vélo mécanique puis vente. Ils sont incompatibles, donc leurs probabilités s'additionnent.
2. Ainsi, $P(V) = P(E)P(V \mid E) + P(\overline{E})P(V \mid \overline{E}) = 0,8 \times 0,6 + 0,2 \times 0,7$. On retrouve la probabilité totale d'une vente en tenant compte des deux types de vélos prêtés.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(V) = 0,62.$

Question 4. Sachant que le prêt a débouché sur une vente, déterminer la probabilité que le vélo prêté soit électrique. Arrondir à 10^{-3}.

On cherche une probabilité conditionnelle, sachant qu'une vente a eu lieu. On divise donc la probabilité d'une vente après un prêt électrique par la probabilité totale d'une vente. Les résultats précédents donnent $P(E \cap V) = 0,48$ et $P(V) = 0,62$, d'où $P(E \mid V) = \frac{P(E \cap V)}{P(V)} = \frac{0,48}{0,62}$. Il faut ensuite arrondir au millième, comme demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(E \mid V) \approx 0,774.$

Partie B - Loi binomiale

Question 1. La variable aléatoire X compte, parmi 80 vélos réparés, ceux dont la réparation nécessite moins d'une heure de main-d'œuvre. Sachant que X suit une loi binomiale, donner ses paramètres.

Chaque vélo réparé constitue une épreuve, avec comme succès une réparation nécessitant moins d'une heure de main-d'œuvre. La probabilité de succès est constante, égale à 0,62, et l'échantillon comprend 80 vélos. Puisque l'énoncé admet que le nombre de succès suit une loi binomiale, le premier paramètre est l'effectif des épreuves et le second est la probabilité de succès.

Variable	Paramètres
X	$n = 80$, $p = 0,62$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0,62).$

Question 2. Déterminer P(X = 40). Arrondir à 10^{-3}.

Pour une loi binomiale, la probabilité d'obtenir exactement 40 succès se calcule avec la formule $P(X = 40) = \binom{80}{40}(0,62)^{40}(1-0,62)^{40}$. Le facteur $1 - 0,62 = 0,38$ correspond à la probabilité qu'une réparation nécessite au moins une heure. L'évaluation de cette expression donne environ $0,008288$, puis l'arrondi au millième donne le résultat demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = 40) \approx 0,008$.

Question 3. Déterminer la probabilité que, dans l'échantillon, le nombre de vélos nécessitant moins d'une heure de main-d'œuvre soit strictement supérieur au nombre de vélos nécessitant plus d'une heure. Arrondir à 10^{-3}.

1. Sur les 80 réparations, si X nécessitent moins d'une heure, alors $80 - X$ en nécessitent plus d'une heure.
2. La condition demandée devient $X > 80 - X$, donc $X > 40$. La probabilité cherchée est alors $P(X > 40) = 1 - P(X \leq 40)$, pour $X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0,62)$. Le calcul de cette probabilité, arrondi au millième, donne le résultat ci-dessous.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X > 40) \approx 0,981$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Sur un échantillon de 90 clients, 54 sont susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme. Donner l'estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de ces clients.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon. Ici, 54 clients sur les 90 interrogés sont susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme. On divise donc le nombre de clients concernés par l'effectif total : $f = \frac{54}{90} = 0,60$. Cette fréquence fournit l'estimation demandée de la proportion p.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f = 0,60$, soit $60\,\%$.

Question 2.a. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance au niveau de 95 % de la proportion p.

On applique la formule de l'énoncé avec $f = 0,60$ et $n = 90$. La marge d'erreur vaut $1,96\sqrt{\frac{0,60(1-0,60)}{90}} \approx 0,1012$. On obtient alors les bornes $0,60 - 0,1012 \approx 0,4988$ et $0,60 + 0,1012 \approx 0,7012$. L'intervalle de confiance à 95 %, arrondi au millième, est donc :

$[0,499\,;\,0,701]$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle de confiance à 95 % : $[0,499\,;\,0,701]$.

Question 2.b. Indiquer si l'on est certain que la proportion p appartient à cet intervalle de confiance.

Un intervalle de confiance à 95 % ne garantit pas que la proportion inconnue appartienne à l'intervalle calculé pour cet échantillon précis. Le niveau de 95 % décrit la fiabilité de la méthode lorsqu'on répète les prélèvements : à long terme, environ 95 % des intervalles construits de cette façon contiennent la proportion réelle. Il reste donc une incertitude pour l'intervalle obtenu ici.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, on ne peut pas en être certain.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, code 23MATGRB1, durée deux heures; coefficient 2 pour les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux (coefficient 3). Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, étudient la fermeture d'un tiroir par équation différentielle, fonction et algorithme, puis un magasin de vélos par probabilités conditionnelles, loi binomiale et intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y'' + 5y' + 4y = 0, les racines de l'équation caractéristique déterminent les exponentielles de la solution générale.
- Si f(t) tend vers 0 lorsque t tend vers +∞, la droite y = 0 est une asymptote horizontale à sa courbe.
- Pour deux événements E et V, $P(E \cap V) = P(E) \times P(V|E)$, et P(V) se calcule en additionnant les branches qui aboutissent à V.
- Pour X suivant une loi binomiale B(n, p), $P(X = k) = C(n,k)p^k(1-p)^{n-k}$; l'intervalle fourni utilise la fréquence observée.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les conditions initiales et les unités de distance et de vitesse dans le modèle du tiroir.
- Dans l'algorithme, tester chaque valeur de t et continuer jusqu'à ce que la condition devienne fausse.
- Distinguer probabilité conjointe, probabilité totale et probabilité conditionnelle dans l'arbre pondéré.
- Traduire « strictement supérieur » par la bonne inégalité et respecter les arrondis demandés.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du tiroir ?

Résolvez d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses deux racines réelles distinctes donnent une solution générale de la forme $y(t) = C_1e^{r1t} + C_2e^{r2t}$. Les conditions initiales permettent ensuite de déterminer les constantes.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un vélo soit électrique sachant que le prêt a conduit à une vente ?

Utilisez la formule $P(E|V) = P(E \cap V) / P(V)$. La probabilité conjointe se calcule en multipliant P(E) par P(V|E), et la probabilité totale d'une vente vaut 0,62 dans cet exercice.

Q : Comment organiser le temps et traiter l'algorithme ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et les parties de l'exercice 2 sont indépendantes. Répartissez le temps entre les questions, complétez l'algorithme jusqu'à l'arrêt et gardez quelques minutes pour vérifier les arrondis.

Q : Un intervalle de confiance à 95 % garantit-il que la proportion p s'y trouve ?

Non. Le niveau de confiance de 95 % ne signifie pas que l'on est certain que p appartient à l'intervalle obtenu pour cet échantillon. L'intervalle est construit à partir de la fréquence observée et de la taille de l'échantillon.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmv.fr/assets/annales/bts-mv/E2 - Mathématiques/2023/BTS MV - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Maintenance des Véhicules : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.