Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d’un chariot : équation différentielle, étude de fonction et étude locale** (12 questions) — **Page 3**
2. **Système électrique entrée-sortie et transformées de Laplace** (9 questions) — **Page 7**
3. **Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmv.fr/assets/annales/bts-mv/E2 - Mathématiques/2022/BTS MV - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot : équation différentielle, étude de fonction et étude locale

Un chariot de fête foraine est lancé à 20 m·s⁻¹ puis ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction du temps. L'exercice étudie l'équation différentielle associée, les variations de la vitesse, la distance parcourue et le développement limité de la fonction.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre sur l'intervalle considéré l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,8y = 0.

On utilise la formule des solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0$, avec $a = 0,8$. La constante du sujet est positive, donc elle apparaît avec un signe négatif dans l'exponentielle. Aucune condition initiale n'est imposée ici : la constante multiplicative peut donc prendre toute valeur réelle. Cette expression donne l'ensemble des solutions sur $[0; +\infty[$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Pour g définie par g(t) = 5, vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

Pour vérifier que g est solution, on calcule sa dérivée puis on remplace y par g dans l'équation (E).

1. Comme $g(t) = 5$ est constante, $g'(t) = 0$.
2. Le membre de gauche vaut $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$.
3. Il est donc égal au membre de droite pour tout t.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E).

Question 1.c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

> Une solution particulière de (E) est la fonction constante $g(t) = 5$.

La solution générale de l'équation complète s'obtient en ajoutant à cette solution particulière une solution de l'équation homogène associée $y' + 0,8y = 0$. D'après la question 1.a, cette dernière est $ke^{-0,8t}$, où k est réel. En faisant varier cette constante, on obtient toutes les solutions de (E) sur l'intervalle considéré.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale trouvée précédemment est $f(t) = ke^{-0,8t} + 5$. On impose maintenant la condition initiale de l'énoncé, $f(0) = 20$. Comme $e^0 = 1$, cette condition donne $k + 5 = 20$, donc $k = 15$. On remplace ensuite la constante k dans l'expression générale pour obtenir la solution cherchée.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Pour f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On part de l'expression donnée $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Quand t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t}$ tend vers 0. Par multiplication par 15, le premier terme tend encore vers 0. Le second terme reste égal à 5. Par somme des limites, la limite de $f(t)$ vaut donc 5.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite obtenue en 1.a est finie : lorsque t tend vers $+\infty$, $f(t)$ tend vers 5. Cela signifie que les ordonnées de la courbe se rapprochent de la valeur 5, sans nécessairement l'atteindre. La courbe représentative C admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$, d'ordonnée égale à cette limite.

1. Limite en $+\infty$: 5.
2. Asymptote horizontale : droite d'équation $y = 5$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À l'aide de f'(t) = -12e$^{-0,8t}$, dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

L'exponentielle est strictement positive pour tout $t \geq 0$. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$, donc f est strictement décroissante. Elle vaut 20 en 0 et tend vers 5 lorsque t tend vers $+\infty$.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow 5$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour que le chariot s'arrête, sa vitesse doit devenir nulle. Or, pour tout instant fini $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. La vitesse est donc toujours supérieure à 5, et ne peut pas atteindre 0.

- La vitesse diminue au cours du temps.
- Elle tend vers $5\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, sans atteindre cette limite.

Dans le modèle étudié, le système de freinage ne permet donc pas au chariot de s'arrêter.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ et ne s'annule jamais.

Question 4.a. Vérifier que F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. La dérivée de l'exponentielle composée est $-0,8e^{-0,8t}$, et celle de $5t$ est 5. On obtient donc $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est exactement celle de $f(t)$ sur l'intervalle donné.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4.b. En utilisant d = ∫$_{t_0}^{t_1}$ f(t)dt, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

Avec F primitive de f, la distance entre 0 et 1 vaut $d = F(1) - F(0)$. Ainsi, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. En écrivant $0,8 = 4/5$, la valeur exacte est $\frac{95}{4} - \frac{75}{4}e^{-4/5}$ m. Au centimètre près, elle vaut 15,33 m.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = \frac{95}{4} - \frac{75}{4}e^{-4/5} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir et recopier l'unique proposition donnant le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée ; une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni ne retire de point.

Le logiciel donne la partie polynomiale $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de zéro, le reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Parmi les trois propositions de l'énoncé, seule la troisième reprend ce polynôme et ce reste. On peut aussi écrire $\frac{24}{5} = 4,8$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. La valeur initiale est $f(0) = 15e^0 + 5 = 20$. D'après l'expression de la dérivée donnée dans l'énoncé, $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente passe donc par le point de coordonnées $(0; 20)$ et son coefficient directeur est -12.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Système électrique entrée-sortie et transformées de Laplace

Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et sa fonction de transfert est H(p) = 1/(p + 1). Les questions portent sur la représentation du signal d'entrée et l'utilisation des transformées de Laplace pour établir puis étudier le signal de sortie.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

La définition de l'échelon donne $U(t) = 0$ avant son activation et $U(t) = 1$ à partir de celle-ci. Ainsi, $2U(t)$ vaut 2 dès $t = 0$, tandis que $U(t - 1)$ s'active à $t = 1$. À cet instant, l'entrée passe donc de 2 à 1. Le tracé distingue les points ouvert et fermé pour rendre ce saut lisible.

Signal d'entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, 2 si $0 \leq t < 1$, et 1 si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée.

La transformée de Laplace est linéaire. Le formulaire donne la transformée de l'échelon unité et celle de l'échelon retardé d'une unité. On applique ces deux résultats à chaque terme de $e(t) = 2U(t) - U(t - 1)$, en conservant le coefficient 2 et le signe négatif. On obtient alors l'expression de $E(p)$ en fonction de p.

$\mathcal{L}\{U(t)\} = 1/p$ et $\mathcal{L}\{U(t - 1)\} = e^{-p}/p$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/[p(p + 1)]]e⁻ᵖ.

La relation du système est $S(p) = H(p)E(p)$. On utilise $H(p) = 1/(p+1)$ et le résultat de la partie A, $E(p) = (2 - e^{-p})/p$. Le produit se sépare en deux termes, chacun ayant le dénominateur $p(p+1)$. Cette transformation établit directement l'égalité demandée.

$$S(p) = \frac{1}{p+1} \times \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

Pour vérifier l'égalité, on réduit le membre de droite au dénominateur commun $p(p+1)$. Le numérateur obtenu est la différence entre $p+1$ et p, donc il vaut 1. On retrouve exactement le membre de gauche. Cette décomposition pourra ensuite être utilisée pour déterminer les transformées inverses.

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{(p+1) - p}{p(p+1)}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de (1/p)e⁻ᵖ et de [1/(p + 1)]e⁻ᵖ.

Les deux premières inverses se lisent dans le formulaire : $1/p$ correspond à l'échelon unité, et $1/(p+1)$ à l'exponentielle e^{-t} multipliée par cet échelon. Pour les expressions avec e^{-p}, on applique le retard temporel d'une unité à la fonction correspondante.

- $\mathcal{L}^{-1}(1/p) = U(t)$; $\mathcal{L}^{-1}(1/(p+1)) = e^{-t}U(t)$.
- $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/p) = U(t-1)$; $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/(p+1)) = e^{-(t-1)}U(t-1)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

On remplace chaque fraction $1/[p(p+1)]$ par sa décomposition $1/p - 1/(p+1)$. La partie non retardée de $S(p)$ est donc le double de cette différence. Sur l'intervalle $[0;1[$, les fonctions multipliées par $U(t-1)$ sont nulles. Il ne reste que l'inverse de la partie non retardée.

Pour $0 \leq t < 1$, on obtient ainsi $2U(t) - 2e^{-t}U(t)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(t) = 2(1 - e^{-t})$, pour $0 \leq t < 1$.

Question 5.a. Sachant que s(t) = (e - 2)e⁻ᵗ + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), puis donner sa valeur exacte et une valeur approchée au dixième.

La formule fournie sur $[1;+[$ s'évalue en remplaçant t par 1. Comme $e^{-1} = 1/e$, on simplifie l'expression exacte en $2 - 2/e$. Avec $e \approx 2{,}71828$, la valeur numérique est environ 1,264. L'arrondi demandé au dixième est donc 1,3.

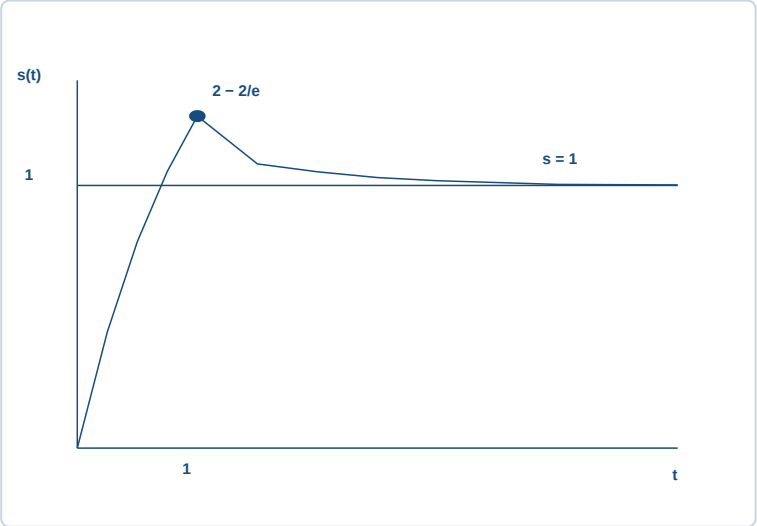
> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3$.

Question 5.b. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.

La première expression décrit la courbe jusqu'à $t = 1$, où elle atteint $2 - 2/e$. À partir de ce point, la formule donnée pour $t \geq 1$ prend le relais. La sortie décroît alors vers 1, sans atteindre cette valeur à temps fini. Le visuel montre le raccordement en $t = 1$ et l'asymptote horizontale.

- Point de raccordement : $(1, 2 - 2/e)$.
- Asymptote à droite : $s = 1$.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe monte jusqu'à $2 - 2/e$ en $t = 1$, puis décroît vers $s = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour tout $t \geq 1$, la formule donnée est $s(t) = 1 + (e - 2)e^{-t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, le facteur e^{-t} tend vers 0. Le terme exponentiel disparaît donc à la limite et il ne reste que la constante 1. La fonction admet ainsi une limite finie.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, code 22MATGRB2, durée de 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en électrotechnique. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot et la réponse d'un système électrique, en mobilisant équations différentielles, étude de fonctions, intégrales, développement limité et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, ajouter à la solution générale de l'équation homogène une solution particulière, puis appliquer la condition initiale.
- Si f(t) tend vers L lorsque t tend vers +∞, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur cet intervalle : d = ∫ f(t)dt.
- Un retard d'une unité dans le temps correspond au facteur e^{-p} dans la transformée de Laplace.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la solution de l'équation homogène, une solution particulière et l'application de la condition initiale.
- Pour le tableau de variation, justifier le signe de la dérivée et indiquer la valeur initiale ainsi que la limite.
- Pour la distance, évaluer la primitive aux deux bornes et exprimer le résultat en mètres.
- Pour les signaux, respecter les intervalles autour de t = 0 et t = 1 et reporter soigneusement les courbes sur le document-réponse.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du freinage ?

Résoudre d'abord l'équation homogène y' + 0,8y = 0, puis ajouter une solution particulière constante de l'équation complète. Enfin, utiliser la condition f(0) = 20 pour déterminer la constante de la solution.

Q : Comment retrouver le signal de sortie à partir de S(p) ?

Décomposer S(p) en éléments simples, identifier les transformées inverses usuelles, puis appliquer la propriété de retard associée à e^{-p}. Le signal s'exprime alors selon les intervalles délimités par t = 1.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points. Répartir le temps entre eux, réserver quelques minutes aux vérifications et aux tracés, et penser à rendre le document-réponse demandé avec la copie.

Q : Quels éléments soigner dans les calculs et les tracés ?

Respecter les intervalles et les instants de changement des signaux, et tracer les courbes sur le document-réponse. Pour les calculs, présenter les étapes utiles, distinguer valeur exacte et valeur approchée, puis appliquer l'arrondi demandé.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmv.fr/assets/annales/bts-mv/E2 - Mathématiques/2022/BTS MV - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Maintenance des Véhicules : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.