Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Départ d'un train à très haute vitesse et calcul d'une aire (13 questions) **Page 3**

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse (13 questions) **Page 8**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmv.fr/assets/annales/bts-mv/E2 - Mathématiques/2018/BTS MV - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Départ d’un train à très haute vitesse et calcul d’une aire

Un projet de train à propulsion électromagnétique vise une vitesse de 400 km/h en moins de deux minutes, et la distance parcourue est modélisée par une fonction. L’exercice étudie cette fonction, la vitesse du wagon et l’aire d’une pièce dessinée pour aménager une gare.

A. Résolution d’une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l’équation différentielle homogène y' − 0,2y = 0, en utilisant la formule fournie.

On compare l’équation à la forme fournie $y' + ay = 0$. Ici, $a = -0,2$, donc les solutions sont $y(t) = ke^{-(-0,2)t}$. La constante k peut être choisie librement dans $\mathbb{R}$. Ces solutions sont définies sur tout l’intervalle demandé, $[0, +\infty[$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = ke^{0,2t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = −15t − 75 est une solution de l’équation différentielle y' − 0,2y = 3t.

On dérive la fonction proposée : $g'(t) = -15$. En substituant dans le membre de gauche de l’équation, on obtient $g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = -15 + 3t + 15 = 3t$. Cette expression est égale au membre de droite pour tout t. La fonction g vérifie donc bien l’équation différentielle.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $g'(t) - 0,2g(t) = 3t$: g est bien une solution.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l’ensemble des solutions de l’équation différentielle y' − 0,2y = 3t.

Une solution de l’équation complète s’obtient en ajoutant une solution particulière aux solutions de l’équation homogène associée. La solution particulière donnée est $g(t) = -15t - 75$, et les solutions homogènes sont $ke^{0,2t}$. Leur somme fournit toutes les solutions, puisque la différence de deux solutions de l’équation complète vérifie l’équation homogène.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 4°. Sachant qu'au temps t = 0 le wagon est au point de départ, déterminer la solution f de l'équation différentielle vérifiant f(0) = 0.

On part de la solution générale $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$. La condition initiale impose $f(0) = 0$. En prenant $t = 0$, on obtient $k - 75 = 0$, donc $k = 75$. En remplaçant cette constante dans la solution générale, on trouve la fonction distance qui vérifie à la fois l'équation et le départ à l'origine.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 75e^{0,2t} - 15t - 75$.

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). À partir des expressions de f(t) et de f'(t) fournies par le logiciel, résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

Le calcul formel donne $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. Ainsi, $f'(t) \geq 0$ équivaut à $e^{0,2t} \geq 1$. Comme l'exponentielle est croissante, cela équivaut à $0,2t \geq 0$, donc à $t \geq 0$. Sur le domaine étudié, cette condition est vérifiée de l'extrémité gauche à l'extrémité droite.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 3]$.

Question 1° b). Déduire du signe de f' les variations de la fonction f sur l'intervalle [0, 3].

La dérivée est nulle en $t = 0$ et strictement positive pour $0 < t \leq 3$. La fonction est donc croissante sur tout l'intervalle. Elle part de $f(0) = 0$ et atteint en $t = 3$ la valeur $75(e^{0,6} - 1) - 45$. Le tableau indique le signe de la dérivée et le sens de variation.

t	**0**	$]0, 3]$	**3**
$f'(t)$	0	+	+
$f(t)$	0	↗	$75(e^{0,6} - 1) - 45$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est croissante sur $[0, 3]$, de 0 à $75(e^{0,6} - 1) - 45$.

Question 2°. Déterminer la distance parcourue par le wagon au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième de kilomètre.

La distance parcourue au bout d'une minute est $f(1)$. En remplaçant t par 1 dans la fonction donnée, on calcule $75(e^{0,2}-1)-15 \approx 1,605$. La distance est exprimée en kilomètres. L'arrondi demandé au dixième donne donc $1,6$ km.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $1,6$ km au bout d'une minute.

Question 3° a). Sachant que la vitesse en kilomètres par minute à l'instant t est f'(t), déterminer la vitesse du wagon à t = 2 minutes et arrondir au dixième.

La vitesse instantanée en kilomètres par minute est $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. À deux minutes, $f'(2) = 15(e^{0,4}-1) \approx 7,377$. Après arrondi au dixième, la vitesse vaut $7,4$ km/min. Il s'agit bien de la vitesse à l'instant considéré, et non de la distance parcourue.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $7,4$ km/min à $t = 2$ minutes.

Question 3° b). Dire si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse.

Le seuil de 400 km/h vaut $400/60 = 6,667$ km/min. On résout $15(e^{0,2t}-1) = 400/60$, ce qui donne $t = 5\ln(13/9) \approx 1,839$ minute. Ce temps est inférieur à deux minutes. L'objectif fixé est donc atteint.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : le seuil est atteint après environ $1,839$ minute, avant deux minutes.

Question 4°. Parmi les trois propositions, recopier l'équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2. Aucune justification n'est demandée.

La tangente au point d'abscisse 2 a pour équation $y = f'(2)(t-2) + f(2)$. On utilise $f'(2) = 15(e^{0,4}-1)$ et $f(2) = 75(e^{0,4}-1) - 30$. Après développement et réduction, on obtient la proposition contenant le terme constant $45e^{0,4} - 75$.

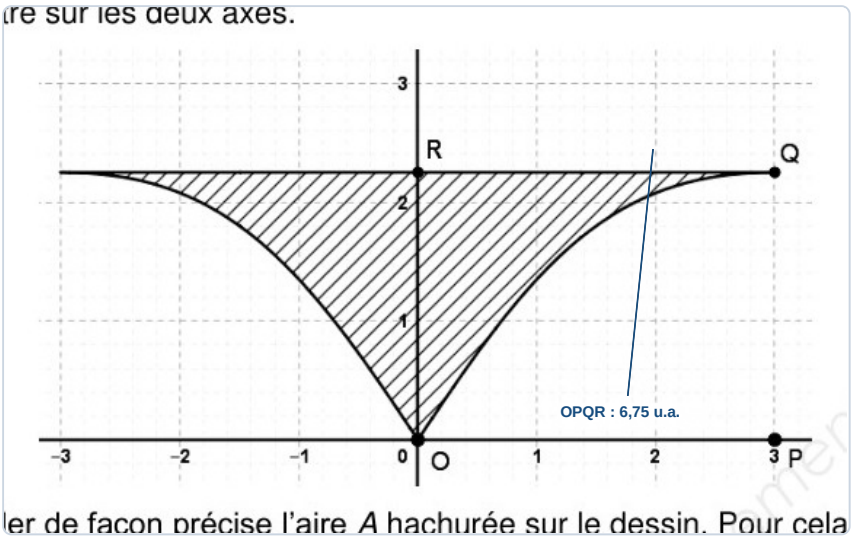
> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 15(e^{0,4}-1)t + 45e^{0,4} - 75$.

C. Calcul intégral

Question 1°. À partir du dessin et des données géométriques, choisir parmi les trois propositions l'aire A1 du rectangle OPQR, en unités d'aire.

Sur le dessin, le rectangle $OPQR$ a pour largeur $OP = 3$ et pour hauteur $OR = 2,25$, puisque son bord supérieur est la droite $y = 2,25$. Son aire est donc $A_1 = 3 \times 2,25 = 6,75$ unités d'aire. C'est la troisième proposition.

Rectangle OPQR



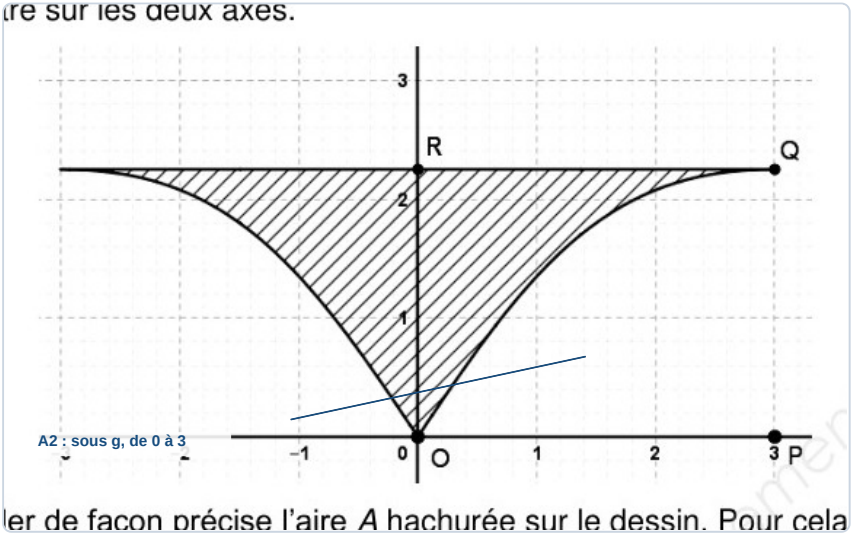
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$A_1 = 6,75$ u.a., troisième proposition.

Question 2°. En utilisant la primitive de g fournie, calculer l'aire A2 de la partie du plan limitée par la courbe de g, l'axe des abscisses et les droites x = 0 et x = 3.

Comme $g(x) = \frac{27x}{2x^2+18}$ est positive sur $[0, 3]$, l'aire demandée est son intégrale sur cet intervalle. Avec la primitive fournie, $A_2 = \left[\frac{27}{4}\ln(x^2+9)\right]_0^3$. On obtient $A_2 = \frac{27}{4}(\ln 18 - \ln 9) = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ unités d'aire.

Aire sous la courbe de g



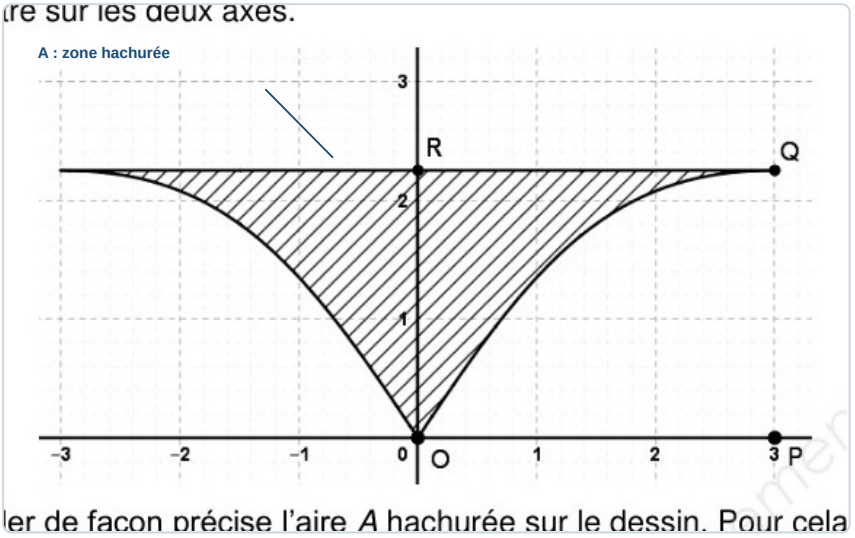
✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u.a.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'aire hachurée A, en unités d'aire, et arrondir au millième.

Sur la moitié droite, l'aire hachurée est celle du rectangle moins l'aire sous la courbe, soit $6,75 - \frac{27}{4}\ln 2$. La pièce étant symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on double cette aire : $A = 2\left(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2\right) = 13,5(1 - \ln 2) \approx 4,143$ unités d'aire.

Aire hachurée totale



✓ RÉPONSE À RETENIR

$A \approx 4,143$ u.a.

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse

L'exercice porte d'abord sur l'obsolescence technique et logicielle de smartphones, puis sur les pannes non réparables dans un lot d'un modèle donné. Il se termine par un test bilatéral destiné à vérifier la proportion annoncée dans un sondage concernant la marque B.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des données sur les obsolescences technique et logicielle dans une population de 200 smartphones, compléter le tableau d'effectifs croisant les deux types d'obsolescence.

Smartphones	Touchés par L	Non touchés par L	Total
Touchés par T	2	4	6
Non touchés par T	14	180	194
Total	16	184	200

Sur 200 smartphones, 3 % correspondent à 6 appareils touchés par T et 8 % à 16 appareils touchés par L. Parmi les appareils touchés par L, 12,5 % sont également touchés par T, soit 2 appareils. Les autres effectifs se déduisent des totaux : 4 sont touchés uniquement par T, 14 uniquement par L et 180 par aucun des deux types d'obsolescence. Les totaux de lignes et de colonnes concordent.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Effectifs croisés : 2, 4, 14 et 180 ; totaux : 6, 194, 16 et 184.

Question 2°. Pour un smartphone prélevé au hasard, donner P(T), P(L) et P_L(T), où T désigne l'obsolescence technique et L l'obsolescence logicielle.

La probabilité de T est la proportion de smartphones touchés par l'obsolescence technique dans toute la population : 3 %. De même, la probabilité de L vaut 8 %. Enfin, l'énoncé indique que, parmi les smartphones touchés par L, 12,5 % sont aussi touchés par T : c'est la probabilité conditionnelle de T sachant L. En écriture décimale, on divise chacune de ces proportions par 100.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0{,}03$, $P(L) = 0{,}08$ et $P_L(T) = 0{,}125$.

Question 3° a). À l'aide des questions précédentes, calculer P(T ∩ L).

Pour déterminer la probabilité que les deux obsolescences soient présentes, on utilise la formule de probabilité conditionnelle : $P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T)$. La proportion touchée par L est 0,08 et, parmi ces appareils, la proportion touchée par T est 0,125. On obtient donc $0{,}08 \times 0{,}125 = 0{,}01$. Ainsi, 1 % des smartphones sont touchés simultanément par les deux types d'obsolescence.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T \cap L) = 0{,}01$.

Question 3° b). À l'aide des questions précédentes, calculer P(T ∪ L).

L'événement $T \cup L$ désigne les smartphones touchés par au moins l'un des deux types d'obsolescence. En additionnant $P(T)$ et $P(L)$, les smartphones comptant dans les deux événements sont comptés deux fois. Il faut donc retrancher une fois l'intersection calculée précédemment. On trouve $0{,}03 + 0{,}08 - 0{,}01 = 0{,}10$, soit 10 % de la population étudiée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T \cup L) = 0{,}10$.

Question 3° c). À l'aide des questions précédentes, calculer P_T(L), la probabilité de L sachant que T est réalisé.

On cherche la probabilité que le smartphone soit touché par L sachant qu'il est déjà touché par T. La formule est $P_T(L) = \dfrac{P(T \cap L)}{P(T)}$. Avec les probabilités précédentes, cela donne $0{,}01/0{,}03 = 1/3$. En arrondissant au millième, environ un tiers des smartphones touchés par l'obsolescence technique sont aussi touchés par l'obsolescence logicielle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P_T(L) = \dfrac{1}{3} \approx 0{,}333$.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui compte les smartphones non réparables dans un prélèvement de 50, suit une loi binomiale et en déterminer les paramètres.

Le prélèvement de 50 smartphones est assimilé à des tirages avec remise dans un stock suffisamment important. Les tirages sont donc indépendants et la probabilité qu'un smartphone soit non réparable reste constante, égale à 0,045. X compte le nombre de smartphones non réparables parmi ces 50 tirages. Il suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}045$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0{,}045)$.

Question 2°. Calculer la probabilité que les 50 smartphones d'un lot soient tous réparables.

Si les 50 smartphones sont tous réparables, aucun n'est non réparable : cela correspond à l'événement $X = 0$. Pour une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}045$, la probabilité vaut $(1 - p)^n$. Ainsi, $P(X = 0) = 0{,}955^{50} \approx 0{,}100$. Le résultat est arrondi au millième, comme demandé dans l'exercice.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité cherchée est $0{,}100$.

Question 3° a). Faire tourner à la main l'algorithme donné, puis compléter le tableau avec les valeurs de P(X = i) pour i de 0 à 3 et les valeurs successives de S.

Pour chaque valeur de i, on calcule $P(X = i) = \binom{50}{i}(0{,}045)^i(0{,}955)^{50-i}$, puis on l'ajoute à la valeur précédente de S. Les probabilités et les sommes cumulées du tableau sont arrondies au millième. La valeur de $P(X = 0)$, affichée à 0,1 dans le sujet, est utilisée avec sa valeur non arrondie pour obtenir les sommes successives.

i	0	1	2	3
P(X=i)	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = i)$: 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. Sommes successives : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat.

La boucle additionne les probabilités pour $i = 0$, 1, 2 et 3. La valeur finale de S est donc $P(X \leq 3)$, la probabilité qu'un lot contienne au plus trois smartphones non réparables. La somme des probabilités non arrondies vaut environ 0,813 au millième. Cela correspond à environ 81,3 % des lots prélevés.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $S = 0{,}813$: environ 81,3 % des lots contiennent au plus trois smartphones non réparables.

Question 4°. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance est $E(X) = np$. Ici, le nombre de prélèvements est 50 et la probabilité d'un smartphone non réparable est 0,045. Le calcul donne $E(X) = 50 \times 0{,}045 = 2{,}25$. Sur un grand nombre de lots de 50 smartphones, on compte donc en moyenne 2,25 appareils non réparables par lot.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$E(X) = 2{,}25$ smartphones non réparables par lot en moyenne.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Parmi les trois propositions, choisir la valeur de h arrondie au centième telle que, sous H0, P(0,55 − h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95.

Sous H_0, l'écart type de F vaut 0,037 et la moyenne vaut 0,55. L'intervalle central d'une loi normale contenant 95 % des valeurs s'étend à environ 1,96 écarts types de la moyenne. Ainsi, $h \approx 1{,}96 \times 0{,}037 = 0{,}07252$. Arrondi au centième, cela donne 0,07, qui est la proposition correcte parmi les trois réponses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$h \approx 0{,}07$.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %.

Le test est bilatéral au seuil de 5 %. Avec la valeur arrondie $h = 0{,}07$, l'intervalle d'acceptation est centré sur 0,55 et ses bornes valent $0{,}55 - 0{,}07$ et $0{,}55 + 0{,}07$. On ne rejette pas l'hypothèse nulle si la fréquence observée appartient à cet intervalle. En dehors de cet intervalle, on rejette H_0 au profit de H_1.

- Ne pas rejeter H_0 si $0{,}48 \leq F \leq 0{,}62$.
- Rejeter H_0 si $F < 0{,}48$ ou $F > 0{,}62$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Ne pas rejeter H_0 si $F \in [0{,}48\,;\,0{,}62]$; la rejeter sinon.

Question 3°. Sur les 180 personnes interrogées, 76 déclarent que la marque B pratique l'obsolescence programmée. Formuler la conclusion du test.

La fréquence observée dans l'échantillon est $76/180 \approx 0{,}422$. Elle est inférieure à la borne basse 0,48 de l'intervalle d'acceptation. La règle du test conduit donc à rejeter H_0 au seuil de 5 %. L'échantillon ne confirme pas la proportion annoncée de 55 % et fournit un résultat en faveur d'une proportion différente.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$76/180 \approx 0{,}422 < 0{,}48$: rejet de H_0 au seuil de 5 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2018, porte le code MATGRB1 et dure deux heures. Son coefficient varie selon la spécialité, de 1 à 3. Les deux exercices étudient le départ d'un train à très haute vitesse et l'obsolescence programmée des smartphones. Les compétences évaluées mobilisent équations différentielles, fonctions, intégrales, probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour résoudre une équation différentielle linéaire, combiner la solution générale de l'équation homogène et une solution particulière.
- La vitesse instantanée est la dérivée de la distance : ici f'(t) s'exprime en kilomètres par minute.
- Une aire sous une courbe se calcule par intégration sur les bornes données, en tenant compte de la figure et de la symétrie.
- Pour X binomiale de paramètres n et p, E(X) = np ; un test bilatéral compare la fréquence observée à l'intervalle d'acceptation.

Points de vigilance & attentes du jury

- Convertir les kilomètres par minute en kilomètres par heure avant de comparer la vitesse à l'objectif de 400 km/h.
- Pour l'aire hachurée, lire le schéma, exploiter la symétrie et distinguer l'aire du rectangle de celle sous la courbe.
- Ne pas confondre une probabilité conjointe avec une probabilité conditionnelle, et préciser les événements concernés.
- Pour le test, appliquer la règle bilatérale au seuil de 5 % et formuler une conclusion liée à H0.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre une équation différentielle linéaire de cet exercice ?

On résout d'abord l'équation homogène associée. On détermine ensuite une solution particulière adaptée au second membre, puis on additionne les deux résultats et on utilise la condition initiale pour fixer la constante.

Q : Comment calculer l'aire demandée à partir de la primitive fournie ?

On évalue la primitive aux bornes x = 0 et x = 3, puis on soustrait ses valeurs. Pour obtenir l'aire hachurée totale, on combine ce résultat avec l'aire du rectangle et la symétrie indiquée sur la figure.

Q : Comment gérer les deux heures de l'épreuve ?

Les deux exercices valent chacun dix points et leurs parties sont annoncées comme indépendantes. Répartissez le temps entre eux, commencez par les questions accessibles et gardez quelques minutes pour vérifier calculs, arrondis et unités.

Q : Que faut-il faire pour conclure le test d'hypothèse ?

Énoncez la règle de décision liée au seuil de 5 %, puis comparez la fréquence observée à l'intervalle d'acceptation. Indiquez clairement si les données conduisent à rejeter l'hypothèse nulle selon le test.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmv.fr/assets/annales/bts-mv/E2 - Mathématiques/2018/BTS MV - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Maintenance des Véhicules : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.